Equivariant Riemann-Roch number of non-compact symplectic manifolds (Algebraic Topology focused on Transformation Groups)

藤田, 玄

数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 131-139

Equivariant Riemann-Roch number of non-compact symplectic manifolds

日本女子大学理学部 藤田 玄
Hajime Fujita
Faculty of Science, Japan Women's University *

1 序

本稿の目的は, 研究集会「変換群を核とする代数的位相幾何学」における講演にもとづいて論文 [4] の概説をすることである. シンプレクティック幾何学の研究において, **Riemann-Roch(RR)** 数という不変量の研究が様々な観点からなされている. RR 数は以下の状況で定義される不変量である. コンパクトなシンプレクティック多様体 (M,ω) が前量子化可能, つまりシンプレクティック形式 ω の定める deRham コホモロジー類が整係数に持ち上がるとき, M 上の接続付き Hermitian 直線束 (L,∇) であって, その接続形式 ∇ の曲率形式が $-\sqrt{-1}\omega$ に一致するものが存在する. このような (L,∇) を前量子化束という. このとき, ω と整合的な M の概複素構造に付随する spin^c-Dirac 作用素の Fredholm 指数として RR 数は定義される. 群作用がある場合, RR 数は群の (仮想的な) 表現を与える. (M,ω) に Kähler 構造が入り L の正則切断の高次コホモロジーが消滅する場合, RR 数は正則切断の空間の次元に一致する. この正則切断の空間は幾何的量子化の文脈では (M,ω) の量子化とみなされる対象で, Guillemin-Sternberg による量子化予想の文脈や Borel-Weil 理論など表現論においても重要な研究対象となっている.

通常 RR 数はコンパクトなシンプレクティック多様体に対して定義される. コンパクトでない場合, 一般には Dirac 作用素が Fredholm にならないため, ナイーブには RR 数は定義されない. 筆者は [4] において, Hamiltonian S^1-作用をもつコンパクトとは限らないシンプレクティック多様体に対して運動量写像にある種のコンパクト性の仮定をおくことにより, S^1-同変な RR 数の定式化を与えた. [4] における構成は, [5, 6, 7] において筆者が古田幹雄氏 (東大数理) および吉田尚彦氏 (明治理工) との共同研究で構築した理論に基づくものである. そこでは, コンパクトとは限らない Riemann 多様体上の Dirac 型作用素に対するある摂動から Fredholm 作用素およびその指数を構成する枠組みが与えられた. この摂動は, 多様体上のファイバー束の族とそのファイバーに沿った Dirac 型作用素の族を用いて定義される. 具体的には, 前量子化可能なシンプレクティック多様体上の Hamiltonian トーラス作用から得られるトーラス束の族から構成される. この指数理論から Dirac 型作用素の指数の局所化公式が得られ, RR 数の格子点への局所化や量子化予想の証明などの応用がなされた. なお, この摂動は群作用を本質的に

*fujitah@fc.jwu.ac.jp

用いるものではなく, したがって局所化公式も固定点公式とは異なるものであることを注意しておく. また, [4] で定義された同変指数は [5, 6, 7] の指数の直接的な同変版ではないことも注意しておく. 直接的な同変版とその応用については [19] に解説がある.

摂動を用いた非コンパクトな多様体上の指数理論の定式化として, Braverman によるものもある. [2] において Braverman は, 群作用を持つ多様体上のある同変写像から定義されるベクトル場の Clifford 作用による摂動を考えることである (正則化された) 同変指数を定義した. その指数は Atiyah による横断的楕円型作用素の指数に一致することも示されている. Braverman による指数理論も我々の指数理論も, 群作用の軌道に沿った摂動を用いるという意味で類似点がある. 運動量写像が固有であるという仮定 $(+\alpha)$ のもとではそれらが一致することがわかるが, そうではない極めて単純な例で両者が一致しないこともわかる. 具体例を見ることで定性的な違いが見えてくるが, より精密な両者の違いは捉えられていない.

本稿の構成は以下の通りである. まず第 2 章でコンパクトな状況での RR 数の定義を確認しておく. 第 3 章では, 非コンパクトな設定への拡張を述べる. 第 4 章では, 量子化予想の主張を述べ, 拡張された同変指数に対しても主張が成立することを述べる. 第 5 章では, Braverman による同変指数の枠組みを説明し, 我々の指数理論との類似点および相違点を述べる.

謝辞. 講演の機会を与えて下さった世話人の佐藤隆夫氏に感謝いたします. 本研究は JSPS 科研費 (26800045(若手 B)) の補助を受けております.

1.1 仮定と記号

- 本稿では常に前量子化可能なシンプレクティック多様体を考える. つまり, シンプレクティック多様体 (M, ω) について, ω の定める deRham コホモロジー類は整係数に持ち上がると仮定する. また, ω に対応する前量子化束 (L, ∇), つまり M 上の Hemitian 直線束 L とその Hermitian 接続 ∇ でその曲率形式が $-\sqrt{-1}\omega$ に一致するものを固定して考える.

- 整数 n に対して, $\mathbb{C}_{(n)}$ を S^1 の複素 1 次元表現であってウェイト n のものとする. つまり, ベクトル空間として $\mathbb{C}_{(n)} = \mathbb{C}$ であって, $t \in S^1(\subset \mathbb{C})$ と $z \in \mathbb{C}_{(n)}$ に対して $t \cdot z := t^n z$ である.

- コンパクト Lie 群 G の表現 R と G の既約表現 ρ に対して, R における ρ の重複度を $R^{(\rho)} \in \mathbb{Z}$ で表す. とくに, $G = S^1$ のとき $\mathbb{C}_{(n)}$ の重複度を $R^{(n)}$ で表す.

2 コンパクトシンプレクティック多様体の場合

まず, コンパクトな場合の状況を復習しておく. (M, ω) を前量子化可能シンプレクティック多様体, (L, ∇) を ω に対応する前量子化束とする. いま, ω と整合的な概複素構造 J をひとつ固定し, M の接束の複素化を J に関して固有分解し,

$$TM \otimes \mathbb{C} = TM^{1,0} \oplus TM^{0,1}$$

とする．つまり，$J|_{TM^{1,0}} \equiv \sqrt{-1}$, $J|_{TM^{0,1}} \equiv -\sqrt{-1}$ である．余接束に関しても同様の分解

$$T^*M \otimes \mathbb{C} = T^*M^{1,0} \oplus T^*M^{0,1}$$

を考え，外積代数を用いて

$$W = \wedge^\bullet T^*M^{0,1}$$

とおく．よく知られているように，W には微分形式の外積および (ω と J の誘導する計量に関する) 縮約を用いて TM の Clifford 作用

$$c : TM \to \mathrm{End}(W)$$

が定義され，$\mathbb{Z}/2$-次数付き Clifford 加群 $W = W^+ \oplus W^-$ となる ([10])．次数は外積の偶奇による．$W_L := W \otimes L$ とおくと，$v \in TM$ に対して $c_L(v) := c(v) \otimes \mathrm{id_L}$ とおくことにより W_L も $\mathbb{Z}/2$-次数付き Clifford 加群 $W_L = W_L^+ \oplus W_L^-$ となる．外微分作用素 d(の複素化) を分解 $TM \otimes \mathbb{C} = TM^{1,0} \oplus TM^{0,1}$ により $d = \partial + \bar{\partial}$ と分解し，さらに L の接続 ∇ をテンソルすることにより L-係数の Dolbeault 作用素 $\bar{\partial}_L : \Gamma(\wedge^\bullet T^*M^{0,1} \otimes L) \to \Gamma(\wedge^{\bullet+1} T^*M^{0,1} \otimes L)$ を得る．L^2-内積に関する $\bar{\partial}_L$ の共役作用素を $\bar{\partial}_L^*$ とする．外積の偶奇でまとめることにより，1 階の楕円型自己共役作用素 $D_L := \bar{\partial}_L + \bar{\partial}_L^* : W_L \to W_L$ をえる．いま，M をコンパクト (で境界がない) とすると，コンパクト多様体上の楕円型作用素の一般論により，D_L は Fredholm 作用素，つまり $\mathrm{Ker}(D_L)$ および $\mathrm{Coker}(D_L)$ は有限次元となる．また，D_L は概複素構造の定める spin^c-構造に関する ($\mathbb{Z}/2$-次数付き)spin^c-Dirac 作用素であり，W_L の次数により $D_L = D_L^+ + D_L^-$, $D_L^+ : \Gamma(W_L^+) \to \Gamma(W_L^-)$, $D_L^- : \Gamma(W_L^-) \to \Gamma(W_L^+)$ と分解できる．このとき，$D_L^\pm$ も Fredholm 作用素であり，D_L の自己共役性から $D_L^+ = (D_L^-)^*$ となる．

定義 2.1. 前量子化付きコンパクトシンプレクティック多様体 (M, ω, L, ∇) に対して，その **Riemann-Roch 数** $RR(M, L)$ を D_L^+ の Fredholm 指数

$$RR(M, L) := \dim(\mathrm{Ker}(D_L^+)) - \dim(\mathrm{Coker}(D_L^+)) \in \mathbb{Z}$$

により定義する．

注意 2.1. $RR(M, L)$ の性質に関していくつか注意を述べておく．

1. ω と整合的な概複素構造全体の集合が可縮であることと，Fredholm 作用素の指数のホモトピー不変性により，$RR(M, L)$ は J のとり方に依存しない．

2. Hirzebruch-Riemann-Roch の定理より，$RR(M, L)$ は L の Chern 指標 $e^{c_1(L)} = e^\omega$ と M の Todd 類 $\mathrm{Td}(M)$ の積の M 上での積分の値 $\displaystyle\int_M e^\omega \mathrm{Td}(M)$ に等しい [1]．

3. J が可積分，つまり (M, ω, J) が Kähler 多様体であるとき，L には自然に正則直線束の構造が入る．このとき，J の可積分性から $\bar{\partial}_L \circ \bar{\partial}_L = 0$ となり，L 係数の Dolbeault コホモロジー $H^*(M, L)$ が定義され，Hodge-小平の定理により，Riemann-Roch 数は Dolbeault コホモロジーの Euler 標数に一致する．つまり

$$RR(M, L) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(M, L)$$

[1] この事実からも上述の 1. の事実はわかる．

が成立する. とくに, L の高次コホモロジーが消滅している場合, $RR(M,L)$ は L の正則切断の空間の次元を与える.

4. ここで考えているデータ (M,ω,L,∇) にコンパクト Lie 群 G が作用している状況下で, (J も G-不変なものをとることで)$\mathrm{Ker}(D_L^+)$ および $\mathrm{Coker}(D_L^+)$ は G の有限次元表現になり,
$$RR_G(M,L) := \mathrm{Ker}(D_L^+) - \mathrm{Coker}(D_L^+)$$
は G の表現環 $R(G)$ の元を与える. $RR_G(M,L)$ を同変 **Riemann-Roch** 数 (または Riemann-Roch 指標) という. 本稿で与える指数はこの同変 Riemann-Roch 数の非コンパクトな状況への拡張である.

3 非コンパクトシンプレクティック多様体への拡張

次に, 前章での定式化の非コンパクトな状況への拡張を考える. M のコンパクト性を仮定しなくとも, (定義域などの関数解析的な問題を無視すれば)$\mathbb{Z}/2$-次数付き Dirac 作用素 $D_L = D_L^+ + D_L^- : \Gamma(W_L^+ \oplus W_L^-) \to \Gamma(W_L^+ \oplus W_L^-)$ は定義できる. しかし, D_L や D_L^+ が Fredholm とはかぎらないため, ナイーヴには $RR(M,L)$ の定義はできない. そこで, [4] において筆者は古田幹雄氏 (東大数理) および吉田尚彦氏 (明治理工) との共同研究 ([5, 6, 7]) で用いた Dirac 作用素の摂動および群作用によるある種の正則化の手続きを用いて, 有限の値を取り出す処方箋を与えた. 以下の設定を考える.

(M,ω) をコンパクトとは限らない前量子化可能シンプレクティック多様体, (L,∇) を ω に対応する前量子化束とする. (M,ω) に S^1 が Hamiltonian に作用し, その作用は (L,∇) にも持ち上がっていると仮定する. 対応する運動量写像を $\mu : M \to \mathrm{Lie}(S^1)^* \cong \mathbb{R}$ とする. 次のコンパクト性を仮定する.

仮定. 各 $n\in\mathbb{Z}$ の逆像 $\mu^{-1}(n)$ はコンパクトである.

V を S^1-作用の固定点集合の補集合 $M\setminus M^{S^1}$ とすると, V 上の微分作用素 $D_{S^1} : \Gamma(W_L|_V) \to \Gamma(W_L|_V)$ であって次の性質をもつものが構成される.

- D_{S^1} は S^1 軌道方向の微分しか含まない.
- 各 $x\in V$ に対し, 軌道 $S^1\cdot x$ 上の作用素 $D_{S^1}|_{S^1\cdot x} : \Gamma(W_L|_{S^1\cdot x}) \to \Gamma(W_L|_{S^1\cdot x})$ は $\mathbb{Z}/2$ 次数付き Dirac 型作用素である. つまり, $D_{S^1}|_{S^1\cdot x}$ の主表象は S^1-方向の Clifford 作用に一致する.

このとき, 運動量写像の基本的な性質から次の事実がわかる.

1. 各 $x \in V$ に対して, $L|_{S^1\cdot x}$ の平行切断の空間 $H^0(S^1\cdot x, L|_{S^1\cdot x})$ が自明であることと $\mathrm{Ker}(D_{S^1}|_{S^1\cdot x})$ が自明であることは同値である. さらに, これは S^1 の表現空間としての重複度についても正しい.

2. 平行切断の空間 $H^0(S^1\cdot x, L|_{S^1\cdot x})$ が非自明であれば $\mu(x) \in \mathbb{Z}$ であり, S^1 の表現として $H^0(S^1\cdot x, L|_{S^1\cdot x}) = \mathbb{C}_{(\mu(x))}$ となる. とくに , $x \in M^{S^1}$ であれば $\mu(x) \in \mathbb{Z}$, $H^0(S^1\cdot x, L|_{S^1\ x}) = L|_x = \mathbb{C}_{(\mu(x))}$ となる.

各 $n \in \mathbb{Z}$ に対してコンパクト集合 $\mu^{-1}(n)$ の S^1-不変な相対コンパクト近傍 M_n であって $\mu^{-1}(n) \subset M_n \subset \mu^{-1}([n-1/2, n+1/2])$ となるものをとり, $V_n := M_n \setminus \mu^{-1}(n)$ とおく.

定義 3.1. $\rho_n : M_n \to \mathbb{R}$ を $\mu^{-1}(n)$ の十分近くで 0, その遠くでは 1 となる S^1-不変なカットオフ関数とする. $t > 0$ に対して $\Gamma(W_L|_{M_n})$ 上の微分作用素 $D_{L,n,t}$ を

$$D_{L,n,t} := D_L|_{M_n} + t\rho_n D_{S^1}|_{V_n}$$

により定義する.

定理 3.2 ([4], Proposition 3.2, Proposition 3.3). 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対してある $T > 0$ が存在して任意の $t > T$ に対して $D_{L,n,t}$ は $\mathbb{Z}/2$ 次数付き *Fredholm* 作用素 $D_{L,n,t} = D^+_{L,n,t} + D^-_{L,n,t}$ となる. とくに, その同変 *Fredholm* 指数

$$\mathrm{ind}_{S^1}(M_n) := \mathrm{Ker}(D^+_{L,n,t}) - \mathrm{Coker}(D^+_{L,n,t})$$

が表現環 $R(S^1)$ の元として定義される. さらに, $\mathrm{ind}_{S^1}(M_n)$ は M_n のとり方によらない.

定義 3.3. 準同型写像 $RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L) : R(S^1) \to \mathbb{Z}$ を各 $\mathbb{C}_{(n)} \in R(S^1)$ に対して

$$RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L)(\mathbb{C}_{(n)}) := \mathrm{ind}_{S^1}(M_n)^{(n)} \in \mathbb{Z}$$

により定義する. $RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L)$ を**同変局所 Riemann-Roch 数**とよぶ.

注意 3.1. $RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L)$ の定義では, 逆像 $\mu^{-1}(n)$ の近傍からウェイト n の重複度のみを取り出すという恣意的なことをしているようにも見えるが, 上述の運動量写像の基本性質と同変指数の消滅定理 ([7, Theorem 6.1]) により, $\mathrm{ind}_{S^1}(M_n)$ には $\mathbb{C}_{(n)}$ 以外の重複度は含まれないことがわかる.

同変局所 Riemann-Roch 数は以下の意味でコンパクトなものに対する定義の一般化になっている.

定理 3.4. M がコンパクトなとき, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L)(\mathbb{C}_{(n)}) = RR_{S^1}(M,L)^{(n)} \in \mathbb{Z}$$

となる.

注意 3.2. 本稿では [4] に基づいて, S^1-作用に対する定義を与えているが, [6] の設定を適切に用いることで, 高次元のトーラス作用に関して同様の定義をすることも可能であると思われる.

4 量子化予想の定式化とその証明

同変 Riemann-Roch 数に関わる重要な研究として, **量子化予想 (量子化 (Quantization) とシンプレクティック簡約 (Reduction) の可換性)[Q,R]=0** がある. これは 1980 年代に Guilemin-Sternberg([9]) によって定式化が与えられ, [8] や [3] などの部分的な解決を経て, [13] や [15] などにおいて一般的に解決された. 以下設定を述べる.

(M,ω,L,∇) をコンパクトなシンプレクティック多様体とその上の前量子化束とし，そこへコンパクト Lie 群 G が Hamiltonian に作用しているとする．いま，$0 \in (\mathrm{Lie}(G))^*$ が対応する運動量写像 $\mu : M \to (\mathrm{Lie}(G))^*$ の正則値であると仮定すると，$\mu^{-1}(0)$ は M のなめらかな部分多様体で G が (有限群の固定化部分群をのぞいて) 自由に作用することが知られている．さらにこのとき，商空間 $M_{(0)} := \mu^{-1}(0)/G$ には自然なシンプレクティック構造 $\omega_{(0)}$ が定義され，$(L_{(0)},\nabla_{(0)}) := (L,\nabla)|_{\mu^{-1}(0)}/G$ が $(M_{(0)},\omega_{(0)})$ 上の前量子化束となることもわかる．$(M_{(0)},\omega_{(0)})$ を (0 での) **シンプレクティック商**という．こうして，前量子化束付きのコンパクトなシンプレクティック多様体 [2]$(M_{(0)},\omega_{(0)},L_{(0)},\nabla_{(0)})$ と，その Riemann-Roch 数 $RR(M_{(0)},L_{(0)}) \in \mathbb{Z}$ が定義される．一方，Hamiltonian$G$-作用をもつ (M,ω,L,∇) から同変 Riemann-Roch 数 $RR_G(M,L) \in R(G)$ およびその自明表現の重複度 $RR_G(M,L)^{(0)} \in \mathbb{Z}$ が定義される．

定理 4.1 (量子化予想 [[3, 9, 8, 12, 13, 15, 16, 17], etc.)．*上述の設定のもと，次が成立する．*

$$RR_G(M,L)^{(0)} = RR(M_{(0)},L_{(0)}) \in \mathbb{Z}.$$

注意 4.1. ここでは簡単のため $0 \in (\mathrm{Lie}(G))^*$ に対するシンプレクティック商を説明したが，一般の $\xi \in (\mathrm{Lie}(G))^*$ に対しても ξ を通る余随伴軌道の逆像に関してシンプレクティック商が考えられ，それに対する量子化予想も証明されている．

Vergne([18]) は以上の主張を非コンパクトな状況に拡張する予想を与え，その予想は Ma-Zhang([11]), Paradan([14]) により証明された．Vergne による定式化では，非コンパクトな M に対する指数として，Atiyah による横断的楕円型作用素の指数 ([1]) が用いられ，Ma-Zhang は後述の Braverman の指数理論を用いることで予想を証明した．前章で我々が定義した同変局所 Riemann-Roch 数に関しても量子化予想が成立する．

定理 4.2. *(M,ω,L,∇) を定義 3.3 のものとする．$n \in \mathbb{Z}$ を対応する運動量写像 $\mu : M \to \mathbb{R}$ の正則値とするとき，*

$$RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L)(\mathbb{C}_{(n)}) = RR(M_{(n)},L_{(n)})$$

が成立する．ただし，$(M_{(n)},L_{(n)}) := (\mu^{-1}(n), L|_{\mu^{-1}(n)})/S^1$ は $n \in \mathbb{Z}$ でのシンプレクティック商である．

5 Braverman の指数理論との関係

我々の同変指数の定式化は，群作用の軌道に沿った作用素による摂動に基づいていた．Braverman は，[2] において群作用をもつ非コンパクトな多様体に対して我々とは別種の軌道に沿った摂動を用いてある同変指数を定義している．以下その設定を述べる．

M を Riemann 多様体，W_M をその上の $\mathbb{Z}/2$-次数付き Clifford 加群束とする．コンパクト Lie 群 G が M に等長的に作用し，その作用が W_M に (TM の Clifford 作用と可換になるように) 持ち上がっていると仮定する．$\mu : M \to \mathrm{Lie}(G)$ を G-同変な写像とする．ただし，$\mathrm{Lie}(G)$ への G-作用は随伴作用である．この μ から M 上のベクトル場 μ_M が

$$\mu_M(x) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(t\mu(x)) \cdot x) \in T_xM$$

[2]一般には orbifold になる．

により定義される．このベクトル場に関して次の仮定をおく．

仮定. $\mathrm{Zero}(\mu_M) := \mu_M^{-1}(0)$ はコンパクト．

定義 5.1. G-同変な $\mathbb{Z}/2$-次数付き Dirac 作用素 [3] $D : \Gamma(W_M) \to \Gamma(W_M)$ に対して，$D_\mu : \Gamma(W_M) \to \Gamma(W_M)$ を

$$D_\mu := D + \sqrt{-1}c(\mu_M)$$

により定義 [4] する．ただし, c は W_M への Clifford 作用である．

ρ を G の既約表現の一つとし，

$$\Gamma(W_M)_\rho := \mathrm{Hom}_G(\rho, \Gamma(W_M)) \otimes \rho$$

とおくと $\Gamma(W_M)_\rho$ は自然に $\Gamma(W_M)$ の部分空間とみなせ, D_μ の $\Gamma(W_M)_\rho$ への制限 $D_{\mu,\rho}$ が定義できる．

定理 5.2. 各既約表現 ρ に対して $D_{\mu,\rho}$ は *Fredholm* 作用素となり, その *Fredholm* 指数

$$\chi_{G,\mu}(M)(\rho) := \dim \mathrm{Ker}(D_{\mu,\rho}) - \dim \mathrm{Coker}(D_{\mu,\rho}) \in \mathbb{Z}$$

を用いて準同型写像

$$\chi_{G,\mu}(M) : R(G) \to \mathbb{Z}, \quad \rho \mapsto \chi_\mu(\rho)$$

が定義できる．さらに, $\chi_{G,\mu}$ は *Atiyah* の横断的楕円型作用素の指数 *([1])* に一致する．

この同変指数理論を用いて, Ma-Zhang は [11] において Vergne による予想を肯定的に解決した．実際には [11] では, $\mathrm{Zero}(\mu_M)$ のコンパクト性より弱く, μ が固有写像である, という仮定のもとで予想を示している．

我々が同変局所 Riemann-Roch 数 $RR_{S^1,\mathrm{loc}}$ を定義した状況において, 不変内積により $\mathrm{Lie}(S^1) = \mathbb{R}$ と $\mathrm{Lie}(S^1)^*$ を同一視することで $\mu : M \to \mathrm{Lie}(S^1)$ と考え, さらに $\mathrm{Zero}(\mu_M)$ がコンパクトであると仮定すると $\chi_{S^1,\mu}(M)$ が定義される．このとき, 群作用の軌道に沿った摂動から定義される 2 つの準同型写像 $RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L)$ と $\chi_{S^1,\mu}(M)$ の関係を問うことは自然であろう．この問に関して次がわかる．

定理 5.3. 上述の仮定のもと, $n \in \mathbb{Z}$ を $\mu : M \to \mathbb{R}$ の正則値と仮定すると

$$RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L)(\mathbb{C}_{(n)}) = \chi_{S^1,\mu}(M)(\mathbb{C}_{(n)}) \in \mathbb{Z}$$

が成立する．とくに, μ が臨界値をもたない場合

$$RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L) = \chi_{S^1,\mu}(M) : R(S^1) \to \mathbb{Z}$$

となる．

[3] W_M への Clifford 作用と整合的な接続と Clifford 作用の合成で定義される微分作用素．
[4] 正確には, 摂動項 $c(\mu_M)$ に M の端で十分早く発散する関数 $f : M \to \mathbb{R}_+$ をかける必要がある．

定理の主張は, 2 つの同変指数に対して量子化予想が成立することから従う. すなわち, μ の正則値 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M,L)(\mathbb{C}_{(n)}) = RR(M_{(n)},L_{(n)}) = \chi_{S^1,\mu}(M)(\mathbb{C}_{(n)})$$

となることからわかる. つまり, 定理 5.3 は 2 つの同変指数の関係を直接比較するのではなく, 量子化予想に由来する $RR(M_{(n)},L_{(n)})$ を経由することで示される. 定理が成立するもっとも単純な例は長さが無限のシリンダー $S^1 \times \mathbb{R}$ である. ただし, 必要な構造は標準的なものを考える. とくに, 前量子化束 $S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ への S^1-作用の持ち上げはファイバーの $\mathbb{C}$ 方向への作用が自明なものを考える. しかし, これら 2 つの同変指数が常に一致するというわけではない. 以下のような単純な例がそれを示している.

例 5.4. $k \in \mathbb{Z}$ に対して, 長さの短いシリンダー $M_k := S^1 \times (k-1/2, k+1/2)$ を考える. ただし, 必要な構造は $S^1 \times \mathbb{R}$ と同様に標準的なものを考える. 特に, S^1-成分への S^1-作用の運動量写像 μ は射影 $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}} : M_k \to (k-1/2, k+1/2) \subset \mathbb{R}$ である. このとき, 直接計算により各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M_k)(\mathbb{C}_{(n)}) &= \delta_{kn} \\ \chi_{S^1,\mu}(M_k)(\mathbb{C}_{(n)}) &= \delta_{k0} \end{aligned}$$

となることがわかる. とくに, $RR_{S^1,\mathrm{loc}}(M_k) \neq \chi_{S^1,\mu}(M_k)$ である.

この単純な例からもわかるように, $\chi_{G,\mu}$ は運動量写像の値が 0 になる点の情報に強く依存する. 一方で $RR_{S^1,\mathrm{loc}}$ は運動量写像の値が整数か否かに強く異存する. このような定性的な理解を超え, 両者を作用素レヴェルで比較することで両者の関係を理解することが望ましい.

参考文献

[1] M. F. Atiyah, *Elliptic operators and compact groups.*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 401, Springer-Verlag, 1974.

[2] M. Braverman, *Index theorem for equivariant Dirac operators on noncompact manifolds*, K-Theory **27** (2002), no. 1, 61–101.

[3] H. Duistermaat, V. Guillemin, E. Meinrenken, and S. Wu, *Symplectic reduction and Riemann-Roch for circle actions*, Math. Res. Lett. **2** (1995), no. 3, 259–266.

[4] H. Fujita, *S^1-equivariant local index and transverse index for non-compact symplectic manifolds*, Math. Res. Lett. **23** (2016), no. 5, 1351–1367.

[5] H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida, *Torus fibrations and localization of index I—polarization and acyclic fibrations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **17** (2010), no. 1, 1–26.

[6] ———, *Torus fibrations and localization of index II: local index for acyclic compatible system*, Comm. Math. Phys. **326** (2014), no. 3, 585–633.

[7] ———, *Torus fibrations and localization of index III: equivariant version and its applications*, Comm. Math. Phys. **327** (2014), no. 3, 665–689.

[8] V. Guillemin, *Reduced phase spaces and Riemann-Roch*, Lie theory and geometry, Progr. Math., vol. 123, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994, pp. 305–334.

[9] V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math. **67** (1982), no. 3, 515–538.

[10] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Math. Series, vol. 89, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[11] X. Ma and W. Zhang, *Geometric quantization for proper moment maps: the Vergne conjecture*, Acta Math. **212** (2014), no. 1, 11–57.

[12] E. Meinrenken, *On Riemann-Roch formulas for multiplicities*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 373–389.

[13] ———, *Symplectic surgery and the* Spin^c*-Dirac operator*, Adv. Math. **134** (1998), no. 2, 240–277.

[14] P. É. Paradan, *Formal geometric quantization II*, Pacific J. Math. **253** (2011), no. 1, 169–211.

[15] Y. Tian and W. Zhang, *An analytic proof of the geometric quantization conjecture of Guillemin-Sternberg*, Invent. Math. **132** (1998), no. 2, 229–259.

[16] M. Vergne, *Multiplicities formula for geometric quantization. I*, Duke Math. J. **82** (1996), no. 1, 143–179.

[17] ———, *Multiplicities formula for geometric quantization. II*, Duke Math. J. **82** (1996), no. 1, 181–194.

[18] ———, *Applications of equivariant cohomology.*, International Congress of Mathematicians, Eur. Math. Soc., Zurich **vol. I** (2008), 635–664.

[19] T. Yoshida, *Equivariant local index*, Geometry of transformation groups and combinatorics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B39, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2013, pp. 215–232.